

Контрольная работа 1-08. Вариант 2.

1. Заболевание встречается в популяции у одной десятой процента людей. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одного заболевшего была не менее 0,95?
2. Доказать, что если коэффициент корреляции $\text{cor}(\xi, \eta) = 1$, то существуют такие постоянные a и b , что $\xi = a + b\eta$. Найти явный вид искомых постоянных.
3. Рассматривается популяция размером N . Известно, что число больных определенным заболеванием в популяции равно n . Найти математическое ожидание и дисперсию числа больных в случайной выборке объема m .
4. Студенту на экзамене предложили тест из 100 вопросов. На каждый из вопросов даны четыре варианта ответа, из которых только один верный. Удовлетворительная оценка ставится, если студент дал правильные ответы хотя бы на сорок вопросов. Какова вероятность сдать экзамен в том случае, если студент случайным образом выбирает один из ответов?
5. Проводятся последовательно 5 опытов. Последующий опыт проводится только в том случае, если предыдущий закончился удачей. Вероятность "удачи" равна 0,7. Найти распределение числа опытов. Построить график функции распределения.
6. В тысячу ящиков разложили изделия, среди которых двести бракованных. Оценить вероятность того, что в определенном ящике не менее трех бракованных изделий.
7. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Случайная величина ξ_k ($k = 1, 2, \dots$) может принимать только два значения $-\sqrt{\ln k}$ и $\sqrt{\ln k}$ с равными вероятностями. Справедливо ли для этой последовательности случайных величин утверждение закона больших чисел в форме Чебышева? *Указание.* Воспользоваться формулой Стирлинга $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$.
8. Функция распределения (проекция) радиуса-вектора случайной точки окружности радиуса a на диаметр имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} & \text{при } -a < x < a, \\ 1 & \text{при } x \geq a. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$; плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X .

9. Вероятность того, что продолжительность жизни объекта меньше или равна t задается формулой $F(t) = 1 - e^{-\gamma t}$, где $\gamma > 0$. Определить среднее время и дисперсию продолжительности жизни объекта.
10. Для поисков пропавшего самолета выделено десять вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает самолет с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поиска.