Контрольная работа 1. Вариант 1.

1. Пусть события $B_1, B_2, \cdots, B_n$, где $P(B_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, образуют разбиение. Доказать, что для любого события A справедлива *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

2. Привести пример трех зависимых случайных событий A, B и C, которые являются попарно независимыми.

3. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, принимающей значения: $-a, 0, a$ $(a > 0)$, если известны математическое ожидание $m_1 = EX$ и второй момент $m_2 = EX^2$ случайной величины X.

4. Пусть случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Какое из событий имеет большую вероятность: случайная величина ξ принимает значение 0 или случайная величина ξ принимает значение 1.

5. Пусть по круглой пластине, имеющей площадь S, передвигаются независимо друг от друга случайным образом три бактерии. Рассмотрим квадрат площади S_1, находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа бактерий внутри данного квадрата. Нарисовать график функции распределения этой случайной величины. Считать $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}$.

6. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания EX не более чем на три стандартных отклонения $\sqrt{DX}$.

7. Задана функция $f(x)$, равная $Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ $(\lambda > 0)$ и нулю при $x < 0$.

   а) При каком значении константы C функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X.

   б) Найти функцию распределения случайной величины X.

   в) Вычислить вероятность попадания в интервал (a, b) $(0 < a < b)$ значений случайной величины X.

   г) Подсчитать математическое ожидание EX и дисперсию DX.

   д) Найти асимметрию распределения.

8. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \cdots, X_n$ имеют одинаковое распределение и $EX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение случайной величины $X = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

9. Пусть случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(a_1, 1)$ и $(a_2, 1)$ соответственно. Выписать плотность распределения случайной величины $X + Y$.

10. Пусть симметричная монета подбрасывается N раз. Пусть ν – число выпадений герба. Оценить при $N \to \infty$ следующую вероятность $P(\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N}{4}} \leq \nu \leq \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N}{4}})$.

Контрольная работа 1. Вариант 2.

1. Пусть события $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ таковы, что $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$. Доказать, что справедлива *формула произведения вероятностей*

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

2. Привести пример трех случайных событий A, B и C, которые не являются попарно независимыми, но при этом выполнено условие $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

3. Проводится серия независимых опытов, в каждом из которых вероятность "успеха"равна p. Опыты продолжаются до первого появления "успеха". Рассматривается случайная величина ξ – число произведенных опытов. Найти закон распределения случайной величины ξ.

4. При введении вакцины (против "некоторого"заболевания) иммунитет создается в $99,99$ процентах случаев. Какова вероятность того, что из 10000 человек заболеет соответственно один, два или три человека?

5. Пусть на квадратной пластине, имеющей площадь S, случайным образом расположены четыре изучаемых объекта. В поле зрения исследователя находится круг площади S_1, находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа объектов в круге. Нарисовать график функции распределения этой случайной величины. Считать $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}$.

6. Случайная величина X принимает целые неотрицательные значения с вероятностью $P(X = k) = e^{-1}/k!$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что случайная величина X принимает значения не меньшие n.

7. Задана функция $f(x) = ae^{-|x|}$.

   а) При каком значении константы a функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X. Построить график плотности распределения случайной величины X.

   б) Найти функцию распределения случайной величины X. Построить график функции распределения случайной величины X.

   в) Подсчитать математическое ожидание EX и дисперсию DX.

8. Найти медиану и моду нормального распределения с параметрами (a, σ^2).

9. Пусть случайные величины X и Y имеют нормальное распределение с параметрами $(1, \sigma_1^2)$ и $(1, \sigma_2^2)$ соответственно. Выписать плотность распределения случайной величины $X + Y$.

10. Известно, что в некоторой стране рост взрослых мужчин приблизительно описывается нормальным распределением со сренim значением EH и стандартным отклонением $\sqrt{DH}$. Оценить вероятность $P(h_1 \leq H \leq h_2)$ того, что рост H случайно выбранного мужчины лежит в пределах от h_1 до h_2 .

Контрольная работа 1. Дополнительная задача 7 к варианту 1.

Задана функция $f(x)$, равная $Cx^2e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ $(\lambda > 0)$ и нулю при $x < 0$.

а) При каком значении константы C функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X.

б) Найти функцию распределения случайной величины X.

в) Вычислить вероятность попадания в интервал $(0, \frac{1}{\lambda})$ значений случайной величины X.