Контрольная работа 1. Вариант 1.

1. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые бернуллиевские случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью $p > 0$ и значение 0 с вероятностью $1 - p$. Пусть новая случайная величина η принимает значение 0, если $\xi_1 + \xi_2$ – четное число, и значение 1, если $\xi_1 + \xi_2$ – нечетное число. При каком значении p случайные величины ξ_1 и η независимы?

   Решение. Заметим, что, исходя из определения независимости случайных величин, достаточно установить при каком значении p выполняются следующие равенства

$$P(\xi_1 = 0, \eta = 0) = P(\xi_1 = 0)P(\eta = 0),$$

$$P(\xi_1 = 1, \eta = 0) = P(\xi_1 = 1)P(\eta = 0),$$

$$P(\xi_1 = 0, \eta = 1) = P(\xi_1 = 0)P(\eta = 1),$$

$$P(\xi_1 = 1, \eta = 1) = P(\xi_1 = 1)P(\eta = 1).$$

   Левые части равенств равносильны следующим

$$P(\xi_1 = 0, \eta = 0) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 0)P(\xi_2 = 0) = (1 - p)^2,$$

$$P(\xi_1 = 1, \eta = 0) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 1)P(\xi_2 = 1) = p^2,$$

$$P(\xi_1 = 0, \eta = 1) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 0)P(\xi_2 = 1) = (1 - p)p,$$

$$P(\xi_1 = 1, \eta = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 1)P(\xi_2 = 1) = p(1 - p).$$

   Так как случайная величина η принимает значения 0 с вероятностью $p^2 + (1 - p)^2$ и значение 1 с вероятностью $2p(1 - p)$, то эти соотношения равносильны следующим

$$(1 - p)^2 = (1 - p)(p^2 + (1 - p)^2),$$

$$p^2 = p(p^2 + (1 - p)^2),$$

$$(1 - p)p = (1 - p)2p(1 - p),$$

$$p(1 - p) = p2p(1 - p),$$

   которые выполняются при единственном значении $p = \frac{1}{2}$.

2. Доказать, что если коэффициент корреляции $cor(\xi, \eta) = 1$, то существуют такие постоянные a и b, что $\xi = a + b\eta$.

   Решение. Введем новую случайную величину $z = \sqrt{D\xi}\eta - \sqrt{D\eta}\xi$. Вычислим дисперсию случайной величины z

$$Dz = 2D\xi D\eta - 2\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}cov(\xi, \eta) = 2D\xi D\eta(1 - cor(\xi, \eta)).$$

   Так как $cor(\xi, \eta) = 1$, то $Dz = 0$. Отсюда вытекает, что случайная величина $\sqrt{D\xi}\eta - \sqrt{D\eta}\xi$ постоянна, то есть $\sqrt{D\xi}\eta - \sqrt{D\eta}\xi = C$, где C-некоторая константа. Укажем искомые постоянные в явном виде $a = E\xi - \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}E\eta$ и $b = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}$.

3. Проводится серия независимых опытов, в каждом из которых вероятность "успеха" равна p. Опыты продолжаются до первого появления "успеха". Рассматривается случайная величина ξ – число неудач до появления первого успеха. Найти закон распределения случайной величины ξ. Вычислить математическое ожидание случайной величины ξ.

   Решение. Случайная величина ξ принимает произвольное значение k с вероятностью $\xi p(\xi = k) = q^k p$. Очевидно, что $\sum_{k=0}^{\infty} q^k p = 1$. Вычислим $E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$.

4. Пусть по круглой пластине радиуса R, передвигаются независимо друг от друга случайным образом три бактерии. Рассмотрим круг радиуса r, находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа бактерий внутри данного круга. Нарисовать график функции распределения этой случайной величины. Считать $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$.

   Решение.

5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n, \cdots$. Случайная величина ξ_n $(n = 2, \cdots)$ может принимать только три значения $-n, 0, n$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n^k}, 1-\frac{2}{n^k}, \frac{1}{n^k}$, где действительное число $k \geq 2$. Применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел в форме Чебышева?

   Решение. Вычислим дисперсию $D\xi_n = \frac{2}{n^{k-2}} \leq 2$ для любых n и $k \geq 2$. Сдедовательно, ЗБЧ применим.

6. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа 20-летних, численностью 10000. Каждый застрахованный внес страховой взнос за 1 год в размере 500 рублей. В случае смерти застрахованного страховая компания выплачивает 50000 рублей. Какова вероятность того, что 1) страховая компания к концу года окажется в убытке; 2) доход окажется максимально возможным. 3)Вычислить среднегодовой доход компании.

   Решение. Страховая компания к концу года окажется в убытке, если выплатит больше $n * 500 = 5000000$ рублей, то есть если произойдет более $100 = 5000000 : 50000$ смертей. Применим т. Пуассона. Оценка параметра $\lambda = 60$. Значит вероятность разорения компании может быть подсчитана как $1 - e^{-60} \sum_{k=0}^{100} \frac{\lambda^k}{k!}$. Максимально возможный доход в размере 10 млн. рублей компания получит с вероятностью e^{-60}. В среднем наблюдается 60 смертей в год. Значит среднегодовой доход компании составит $5000000 - 60 * 50000 = 2000000$ рублей.

7. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?

   Решение. Пусть случайная величина N – число мальчиков-новорожденных. $P(0 \leq N \leq 5000) = P(-\frac{5150}{50} \leq \frac{N-EN}{\sqrt{DE}} \leq -\frac{150}{50}) \approx \Phi(-3) - \Phi(-103) \approx 0,0013$.

8. Вычислить нижнюю квартиль (квантиль уровня 0,25) двустороннего экспоненциального распределения, плотность которого имеет вид $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\alpha|}$, где $x \in R$, $\lambda > 0$, $\alpha \in R$.

Решение. Заметим, что $x = \alpha$ является медианой двустороннего экспоненциального распределения, то есть

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\lambda\alpha+\lambda u}du = \frac{1}{2}.$$

Тогда для того, чтобы вычислить квантиль уровня 0,25 достаточно восстановить функцию распределения при $x < \alpha$:

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda\alpha+\lambda u}du = \frac{1}{2}e^{-\lambda(\alpha-x)}.$$

Решим уравнение

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda(\alpha-x)} = \frac{1}{4}$$

и получим

$$x = \alpha - \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

9. Задана функция $f(x) = a\cos^2 x$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [-\pi/2; \pi/2]$.

1) При каком значении константы a функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X. Построить график плотности распределения случайной величины X. 2) Найти функцию распределения случайной величины X. Построить график функции распределения случайной величины X.

Решение. 1)Воспользовавшись соотношением $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ получаем

$$a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u du = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+cos2u}{2}du = \frac{a\pi}{2}. \quad (1)$$

Следовательно,

$$a = \frac{2}{\pi}.$$

2)

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{x} \cos^2 u du = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{x} \frac{1+cos2u}{2}du = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{sin2u}{2\pi}\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{x}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2\pi} + \frac{1}{2}. \quad (2)$$

10. Дана случайная величина ξ с функцией распределения $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{10}$. Существует ли математическое ожидание $E\xi$ случайной величины ξ? (Если математическое ожидание существует, то вычислить $E\xi$.)

Решение. Математическое ожидание случайной величины ξ существует, если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|F'_\xi(x)dx$$

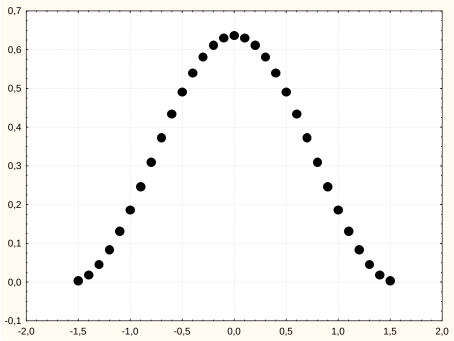

Рис. 1: График плотности распределения

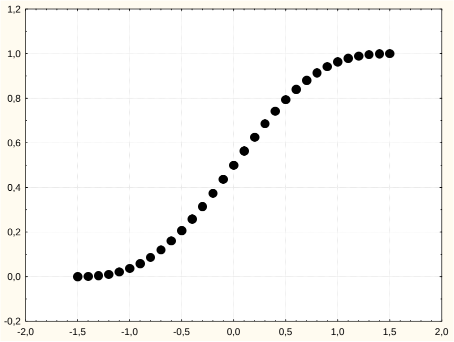

Рис. 2: График функции распределения

сходится абсолютно. Однако

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+\left(\frac{x}{10}\right)^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+\left(\frac{x}{10}\right)^2}dx=\frac{100}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\left(\frac{x}{10}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{10}\right)^2}=\frac{100}{\pi}\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\left(\frac{x}{10}\right)^2\right)=\infty,$$

интеграл расходится, математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Контрольная работа 1. Вариант 2.

1. Даны три попарно независимых события A, B и C, которые одновременно все три произойти не могут. Предполагается, что $P(A) = P(B) = P(C) = p$. Определить наибольшее возможное значение вероятности p.

   Решение. Для произвольных событий A, B и C верна следующая цепочка равенств

   $$P(A\cup B\cup C)-P(A\cup B) = P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC) = P(C\setminus(A\cup B)) \geq 0.$$

   Из попарной независимости событий и условия $P(A) = P(B) = P(C) = p$ следует, что $P(CB) = P(C)P(B) = P(CA) = P(C)P(A) = p^2$. Так как A, B и C одновременно произойти не могут, то $P(ABC) = 0$. Отсюда получаем, что

   $$P(C) - P(CB) - P(CA) + P(ABC) = p - 2p^2 \geq 0,$$

   и соответственно $p \leq \frac{1}{2}$. Можно показать, что вероятность $P(A \cup B \cup C) = 3p - 3p^2$ имеет максимальное значение при $p = \frac{1}{2}$.

2. Доказать, что если коэффициент корреляции $cor(\xi, \eta) = -1$, то существуют такие постоянные a и b, что $\xi = a + b\eta$.

3. Проводится серия независимых опытов, в каждом из которых вероятность "успеха" равна p. Опыты продолжаются до первого появления серии из четырех "успехов". Рассматривается случайная величина ξ – число опытов до появления первой серии. Найти закон распределения случайной величины ξ. Вычислить математическое ожидание случайной величины ξ.

4. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n, \cdots$. Случайная величина ξ_n $(n = 2, \cdots)$ может принимать только два значения $-\sqrt{\ln n}$ и $\sqrt{\ln n}$ с равными вероятностями. Справедливо ли для этой последовательности случайных величин утверждение закона больших чисел в форме Чебышева?

5. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3 опечаток.

6. При проведении телепатического опыта индуктор выбирает независимо от предшествующих опытов с вероятностью $\frac{1}{2}$ один из двух предметов и думает о нем, а реципиент угадывает, о каком предмете думает индуктор. Опыт был повторен 100 раз, и получено 60 правильных ответов. Можно ли приписать полученный результат чисто случайному совпадению или нет?

7. Пусть на квадратной пластине со стороной , случайным образом расположены четыре изучаемых объекта. В поле зрения исследователя находится квадрат со строной b, находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа объектов в квадрате. Построить график функции распределения этой случайной величины. Считать $a/b = 1/4$.

8. Вычислить медиану (квантиль уровня 0,5) распределения Рэлея, плотность которого имеет вид $\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где $x \geq 0$, $\sigma \in R$.

9. Задана функция $f(x) = ae^{-|x|}$.

   а) При каком значении константы a функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X. Построить график плотности распределения случайной величины X.

   б) Найти функцию распределения случайной величины X. Построить график функции распределения случайной величины X.

10. Дана случайная величина ξ такая, что

$$P(\xi = (-1)^{k-1}k) = \frac{6}{k^2\pi^2} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

   Существует ли математическое ожидание случайной величины ξ?