

<b>Лекции</b>	<b>Дата</b>	<b>Темы</b>
1	12.09.08	Пространство элементарных событий с конечным числом исходов. Примеры. События. Операции над событиями. Вероятности событий, их простейшие свойства. Формула для вычисления вероятности объединения конечного числа событий. Классическое определение вероятностей. Условные вероятности.
2	19.09.08	Свойства условных вероятностей. Формула произведения вероятностей. Формула полной вероятности и теорема Байеса. Независимость событий. Примеры
3	26.09.08	Дискретное вероятностное пространство. Определение случайной величины, заданной на дискретном вероятностном пространстве. Распределение дискретной случайной величины. Примеры дискретных распределений. Распределение Бернулли, Пуассона. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Формула для подсчета математического ожидания. Свойства математического ожидания. Дисперсия. Свойства дисперсии.
4	03.10.08	Ковариация. Свойства дисперсии (продолжение). Индикаторы событий. Независимость дискретных случайных величин. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Некоррелированность. Дисперсия суммы. Случай независимых слагаемых.
5	10.10.08	Коэффициент корреляции как мера линейной зависимости случайных величин. Соотношение между некоррелированностью и независимостью. Распределение суммы независимых целочисленных случайных величин. Биномиальное распределение. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли. Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Предельная теорема Пуассона.
6	17.10.08	Формула Стирлинга. Формулировка локальной теоремы Муавра-Лапласа. Доказательство локальной теоремы Муавра-Лапласа.
7	24.10.08	Общее определение вероятностного пространства. Пример неизмеримого множества. Функция распределения непрерывной случайной величины. Свойства. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность. Непрерывные распределения. Примеры. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение. Нормальное (гауссовское) распределение. Формулы для математического ожидания и дисперсии абсолютно непрерывной случайной величины. Характеристики распределения: математическое ожидание, дисперсия.

<b>Лекции</b>	<b>Дата</b>	<b>Темы</b>
<b>8</b>	31.10.08	Характеристики распределения (продолжение): квантили, моменты, медиана, мода, асимметрия, эксцесс. Характеристики распределения гауссовской случайной величины. Распределения, связанные с нормальным: распределение $\chi^2$ , распределение Стьюдента, F-распределение, логарифмически-нормальное распределение. (Презентация - 90 мин.)
<b>9</b>	07.11.08	Правило ``трех сигм''. Преобразования случайных величин. Примеры.
<b>10</b>	14.11.08	Характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых одинаково распределенных бернуlliевских случайных величин. Характеристическая функция распределения Пуассона. Закон больших чисел в форме Хинчина.
<b>11</b>	21.11.08	Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как следствие ЦПТ. Формулировка центральной предельной теоремы для независимых разнораспределенных случайных величин. Условие Линдеберга. Оценка Берри-Эссена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (без доказательства). Сходимость с вероятностью единица. Формулировка усиленного закона больших чисел.
<b>12</b>	28.11.08	Совместная функция распределения случайных величин. Совместная плотность. Формула для подсчета вероятности попадания в область. Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин. (Презентация - 45 мин.)
<b>13</b>	05.12.07	Независимые случайные величины (общий случай). Вид совместной функции распределения и совместной плотности для независимых случайных величин. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Пример некоррелированных случайных величин, являющихся зависимыми. Формула свертки. Пример свертки двух независимых гауссовских случайных величин.
<b>14</b>	12.12.07	Многомерное нормальное распределение. Полиномиальное распределение. Определение цепи Маркова. Пример однородной цепи Маркова. Марковское свойство. Модель Эренфестов.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М. В. ЛОМОНОСОВА**  
**Механико-математический факультет**  
**Кафедра теории вероятностей**

---

**ПРОГРАММА КУРСА ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

для студентов II курса факультета биоинженерии и биоинформатики  
III семестр

Лектор – доцент Яровая Елена Борисовна

**1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов**

- 1.1. Пространство элементарных событий с конечным числом исходов. Примеры
- 1.2. События. Операции над событиями. Вероятности событий, их простейшие свойства. Формула для вычисления вероятности объединения конечного числа событий. Классическое определение вероятностей
- 1.3. Условные вероятности. Свойства условных вероятностей. Формула произведения вероятностей
- 1.4. Разбиение вероятностного пространства. Формула полной вероятности и теорема Байеса
- 1.5. Независимость событий. Примеры

**2. Случайные величины, заданные на дискретном вероятностном пространстве**

- 2.1. Дискретное вероятностное пространство. Определение случайной величины, заданной на дискретном вероятностном пространстве. Распределение дискретной случайной величины
- 2.2. Примеры дискретных распределений. Распределение Бернулли, Пуассона
- 2.3. Определение математического ожидания дискретной случайной величины. Формула для подсчета математического ожидания
- 2.4. Свойства математического ожидания
- 2.5. Дисперсия. Ковариация. Свойства дисперсии
- 2.6. Индикаторы событий
- 2.7. Независимость дискретных случайных величин
- 2.8. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин
- 2.9. Некоррелированность. Дисперсия суммы. Случай независимых слагаемых
- 2.10. Коэффициент корреляции как мера линейной зависимости случайных величин. Соотношение между некоррелированностью и независимостью
- 2.11. Распределение суммы независимых целочисленных случайных величин. Биномиальное распределение
- 2.12. Неравенства Чебышева
- 2.13. Закон больших чисел в форме Чебышева
- 2.14. Закон больших чисел в форме Бернулли
- 2.15. Формула Стирлинга. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа
- 2.16. Предельная теорема Пуассона

### **3. Случайные величины (общий случай)**

- 3.1. Общее определение вероятностного пространства. Пример неизмеримого множества. Функция распределения непрерывной случайной величины. Свойства
- 3.2. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность
- 3.3. Непрерывные распределения. Примеры
  - i. Равномерное распределение
  - ii. Экспоненциальное распределение
  - iii. Нормальное (гауссовское) распределение
  - iv. Распределения, связанные с нормальным: распределение  $\chi^2$ , Стьюдента,  $F$  - распределение, логарифмически-нормальное распределение
- 3.4. Формулы для математического ожидания и дисперсии абсолютно непрерывной случайной величины
- 3.5. Характеристики распределения: математическое ожидание, дисперсия, моменты, квантили, медиана, мода, асимметрия, эксцесс,
- 3.6. Характеристики распределения гауссовой случайной величины. Правило "трех сигм"

### **4. Предельные законы теории вероятностей**

- 4.1. Характеристические функции. Характеристическая функция суммы независимых одинаково распределенных бернуlliевских случайных величин. Характеристическая функция распределения Пуассона
- 4.2. Закон больших чисел в форме Хинчина
- 4.3. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин
- 4.4. Условие Линдеберга. Формулировка центральной предельной теоремы для независимых случайных величин. Оценка Берри-Эссена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (без доказательства)
- 4.5. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как следствие ЦПТ
- 4.6. Сходимость по вероятности. Сходимость с вероятностью единица. Формулировка усиленного закона больших чисел
- 4.7. Преобразования случайных величин. Примеры

### **5. Совместное распределение случайных величин**

- 5.1. Совместная функция распределения случайных величин. Совместная плотность. Формула для подсчета вероятности попадания в область
- 5.2. Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин
- 5.3. Независимые случайные величины (общий случай). Вид совместной функции распределения и совместной плотности
- 5.4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин
- 5.6. Формула свертки
- 5.7. Многомерное нормальное распределение
- 5.8. Полиномиальное распределение

### **6. Цепи Маркова**

- 6.1. Определение цепи Маркова
- 6.2. Пример однородной цепи Маркова
- 6.3. Марковское свойство
- 6.4. Модель Эренфестов

## Список литературы

- [1] Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей* // М: “УРСС”, 2001.
- [2] Ламперти Д. *Вероятность* // М: “Наука”, 1973.
- [3] Севасьянов Б. А. *Ветвящиеся процессы* // М: “Наука”, 1971.
- [4] Тутубалин В. Н. *Теория вероятностей и случайных процессов* // М: “Издательство Московского университета”, 1992.
- [5] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* // Т. 1-2. М: “Мир”, 1984.
- [6] Ширяев А. Н. *Вероятность* // М: “Наука”, 1989.