Семинар 3.

Домашнее задание к семинару 3.

1. *Парадокс Монти-Холла.* Представьте, что вы стали участником игры, в которой вы находитесь перед тремя дверями. Ведущий, о котором известно, что он честен, поместил за одной из дверей автомобиль, а за двумя другими дверями - по козе. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Ведущий говорит вам: <Сначала вы должны выбрать одну из дверей. После этого я открою одну из оставшихся дверей, за которой находится коза. Затем я предложу вам изменить свой первоначальный выбор и выбрать оставшуюся закрытую дверь вместо той, которую вы выбрали вначале. Вы можете последовать моему совету и выбрать другую дверь, либо подтвердить свой первоначальный выбор. После этого я открою дверь, которую вы выбрали, и вы выиграете то, что находится за этой дверью.>

   Например, Вы выбираете дверь с номером 3. Ведущий открывает дверь номер 1 и показывает, что за ней находится коза. Затем ведущий предлагает вам выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы последуете его совету ?

2. Пусть n писем случайно раскладываются по n конвертам с адресами. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.

3. На экзамене n студентов вытаскивают по очереди билеты, из которых M–“счастливые”, а остальные $N - M$– нет. Найти вероятность P того, что студенту, пришедшему на экзамен i-ым, достанется “счастливый” билет, если билет а) не возвращается б) возвращается.

4. Есть r-неразличимых шаров и n-(различимых)ящиков. Определить число различных размещений, при которых ни один ящик не окажется пустым.

5. Два из трех независимо работающих элементов в приборе отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны p_1, p_2, p_3.

6. Имеются две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим требованиям, а в во второй партии имеется 1/4 забракованных деталей. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

7. Привести пример, показывающий, что равенство $P(B \mid A) + P(B \mid \overline{A}) = 1$ неверно.

8. Производится бросание двух костей. Рассмотрим следующие события:

   A – на первой кости выпало нечетное число очков,

   B – на второй кости выпало нечетное число очков,

   C – сумма очков – нечетна.

   Являются ли события A, B, C – попарно независимыми, взаимно независимыми.

Семинар 3.

1. Вычислить математическое ожидание и дисперсию числа очков при подбрасывании игральной кости.
2. Пусть случайная величина X принимает два значения x_1 и x_2 с равными вероятностями. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X
3. Пусть заданы математическое ожидание $EX = 0,1$ и второй момент $EX^2 = 0,8$ случайной величины X. Найти закон распределения случайной величины X.
4. Пусть $EX = 5$ и $EY = 8$. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$.
5. Пусть случайная величина принимает значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ с вероятностями
$$p_1, p_2, \cdots, p_n,$$
при этом $\min_i x_i = m$ и $\max_i x_i = M$. Доказать, что $m \leq EX \leq M$.
6. Пусть случайная величина X принимает два значения x_1 и x_2. Известно EX. Можно ли в этом случае найти распределение случайной величины X?
7. Пусть случайная величина X принимает два значения с вероятностями p_1 и p_2. Известно EX. Можно ли в этом случае найти распределение случайной величины X?
8. Пусть случайная величина X принимает два значения с вероятностями p_1 и p_2, причем большее с вероятностью p_2. Известно EX и DX. Можно ли в этом случае найти распределение случайной величины X?
9. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, где случайная величина ξ, распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$
10. Вычислить математическое ожидание случайной величины $\frac{1}{1+\xi}$, где случайная величина ξ, распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$
11. Подбрасывают n-игральных костей. Пусть S — сумма очков на всех гранях. Найти ES.
12. Найти закон распределения случайной величины $\eta = \sin \frac{\pi}{3}\xi$, где ξ — число очков, выпадающих при бросании игральной кости.
13. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ν, имеющей биномиальное распределение. (Сравнить различные способы подсчета)
14. Проводится серия независимых опытов, в каждом из которых вероятность "успеха" равна p. Опыты продолжаются до первого появления "успеха". Рассматривается случайная величина ξ – число произведенных опытов. Найти закон распределения и вычислить математическое ожидание случайной величины ξ.

15. Пример использования предыдущей задачи. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытание равна $\frac{4}{5}$ и независимы. Испытание заканчивается после того, как первое изделие не выдержит испытания. Найти распределение числа испытаний.

16. Геометрическое распределение. Проводится серия независимых опытов, в каждом из которых вероятность “успеха” равна p. Опыты продолжаются до первого появления “успеха”. Рассматривается случайная величина ξ – число “неудач” до появления первого “успеха”. Найти закон распределения и вычислить математическое ожидание случайной величины ξ.

17. Предположим, что обычная частота заболеваний определенной болезнью равна $\frac{1}{4}$. Для проверки действия вакцины сделана прививка. Какое из свидетельств является более сильным: из 10 человек никому не заболеть, из 17 - одному заболеть, из 23 -двум заболеть?