

Домашнее задание к семинару 7.

1. *Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.* Пусть симметричная монета брошена $2N$ – раз. Найти вероятность того, что герб выпадет на t раз больше, чем решетка.
2. *Интегральная теорема Муавра-Лапласа.* Пусть симметричная монета брошена $2N$ – раз. Пусть ν – число выпадений герба. Найти вероятность того, что число выпадений герба отклониться от своего математического ожидания не более, чем на одно стандартное отклонение.
3. *Применение таблиц нормального распределения.* Сколько нужно произвести независимых испытаний, чтобы с вероятностью 0,8 событие A , вероятность появления которого при одном опыте равна $P(A) = 0,05$ наблюдалась бы не менее 5 раз.

Семинар 7.

1. *Функции распределения дискретных случайных величин.*
Построить функцию распределения бернуллиевской случайной величины.
2. *Функции распределения дискретных случайных величин.*
Построить функцию распределения случайной величины, принимающей значения $a, a + 1, a + 2, \dots, b$ с вероятностями $p_a, p_{a+1}, p_{a+2}, \dots, p_b$ соответственно.
3. При каких значениях c функция

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ cx^{-\frac{3}{2}} & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

является функцией распределения некоторой случайной величины ξ ?

4. Пусть задана функция распределения некоторой случайной величины ξ следующим образом

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Построить график $F_{\xi}(x)$ и найти вероятность события $P(0 < \xi \leq 1,5)$.

5. По плотности распределения

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \cos x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

восстановить функцию распределения. Построить их графики.

6. Распределение случайной величины ξ задано следующим образом

ξ	1	2	3	4
	0,5	0,2	0,2	0,1

Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить ее график.

7. Найти параметр C при котором функцию $f(x) = \frac{C}{e^{-x}+e^x}$ можно рассматривать как плотность распределения некоторой случайной величины.
8. Задана функция распределения случайной величины ξ

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $f_{\xi}(x)$.

9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , распределенной равномерно на отрезке $[A, B]$. Определить вероятность попадания в интервал $(a, b) \subset [A, B]$ случайной величины X .
10. Найти математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания в интервал случайной величины, распределенной по показательному закону.
11. Выписать функцию плотности случайной величины X , имеющей нормальное распределение с параметрами $(3, 2)$.
12. *Распределение Лапласа.* Задана функция $f(x) = ae^{-|x|}$. При каком значении параметра a функцию $f(x)$ можно рассматривать как плотность распределения некоторой случайной величины X . Найти математическое ожидание этой случайной величины.

13. Доказать, что если $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая положительная функция, $E\varphi(X) = m$ существует, то

$$P(X > t) \leq \frac{m}{\varphi(t)}.$$

14. Пусть по круглой пластине радиуса R , передвигаются независимо друг от друга случайным образом три бактерии. Рассмотрим круг радиуса r , находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа бактерий внутри данного круга. Нарисовать график функции распределения этой случайной величины. Считать $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$.
15. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$. Случайная величина ξ_n ($n = 2, \dots$) может принимать только три значения $-n, 0, n$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n^k}, 1 - \frac{2}{n^k}, \frac{1}{n^k}$, где действительное число $k \geq 2$. Применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел в форме Чебышева?
16. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?
17. Задана функция $f(x) = a \cos^2 x$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [-\pi/2; \pi/2]$.
- 1) При каком значении константы a функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X . Построить график плотности распределения случайной величины X . 2) Найти функцию распределения случайной величины X . Построить график функции распределения случайной величины X .