

*Домашнее задание к семинару 7.*

1. *Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.* Пусть симметричная монета брошена  $2N$  – раз. Найти вероятность того, что герб выпадет на  $t$  раз больше, чем решетка.
2. *Интегральная теорема Муавра-Лапласа.* Пусть симметричная монета брошена  $2N$  – раз. Пусть  $\nu$  – число выпадений герба. Найти вероятность того, что число выпадений герба отклониться от своего математического ожидания не более, чем на одно стандартное отклонение.
3. *Применение таблиц нормального распределения.* Сколько нужно произвести независимых испытаний, чтобы с вероятностью 0,8 событие  $A$ , вероятность появления которого при одном опыте равна  $P(A) = 0,05$  наблюдалась бы не менее 5 раз.

### Семинар 7.

1. *Функции распределения дискретных случайных величин.*  
Построить функцию распределения бернуллиевской случайной величины.
2. *Функции распределения дискретных случайных величин.*  
Построить функцию распределения случайной величины, принимающей значения  $a, a + 1, a + 2, \dots, b$  с вероятностями  $p_a, p_{a+1}, p_{a+2}, \dots, p_b$  соответственно.
3. При каких значениях  $c$  функция

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ cx^{-\frac{3}{2}} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

является функцией распределения некоторой случайной величины  $\xi$  ?

4. Пусть задана функция распределения некоторой случайной величины  $\xi$  следующим образом

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ x - 1 & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Построить график  $F_{\xi}(x)$  и найти вероятность события  $P(0 < \xi \leq 1,5)$ .

5. По плотности распределения

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \cos x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

восстановить функцию распределения. Построить их графики.

6. Распределение случайной величины  $\xi$  задано следующим образом

$\xi$	1	2	3	4
	0,5	0,2	0,2	0,1

Найти функцию распределения случайной величины  $\xi$  и построить ее график.

7. Найти параметр  $C$  при котором функцию  $f(x) = \frac{C}{e^{-x} + e^x}$  можно рассматривать как плотность распределения некоторой случайной величины.
8. Задана функция распределения случайной величины  $\xi$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины  $f_{\xi}(x)$ .

9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , распределенной равномерно на отрезке  $[A, B]$ . Определить вероятность попадания в интервал  $(a, b) \subset [A, B]$  случайной величины  $X$ .
10. Найти математическое ожидание, дисперсию, а также вероятность попадания в интервал случайной величины, распределенной по показательному закону.
11. Выписать функцию плотности случайной величины  $X$ , имеющей нормальное распределение с параметрами  $(3, 2)$ .
12. *Распределение Лапласа.* Задана функция  $f(x) = ae^{-|x|}$ . При каком значении параметра  $a$  функцию  $f(x)$  можно рассматривать как плотность распределения некоторой случайной величины  $X$ . Найти математическое ожидание этой случайной величины.

13. Доказать, что если  $\varphi(x)$  – монотонно возрастающая положительная функция,  $E\varphi(X) = m$  существует, то

$$P(X > t) \leq \frac{m}{\varphi(t)}.$$

14. Пусть по круглой пластине радиуса  $R$ , передвигаются независимо друг от друга случайным образом три бактерии. Рассмотрим круг радиуса  $r$ , находящийся внутри пластины. Найти закон распределения числа бактерий внутри данного круга. Нарисовать график функции распределения этой случайной величины. Считать  $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$ .
15. Дана последовательность независимых случайных величин  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$ . Случайная величина  $\xi_n$  ( $n = 2, \dots$ ) может принимать только три значения  $-n, 0, n$  с вероятностями, равными соответственно  $\frac{1}{n^k}, 1 - \frac{2}{n^k}, \frac{1}{n^k}$ , где действительное число  $k \geq 2$ . Применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел в форме Чебышева?
16. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?
17. Задана функция  $f(x) = a \cos^2 x$  при  $x \in [-\pi/2; \pi/2]$  и  $f(x) = 0$  при  $x \notin [-\pi/2; \pi/2]$ .
- 1) При каком значении константы  $a$  функция  $f(x)$  является плотностью распределения некоторой случайной величины  $X$ . Построить график плотности распределения случайной величины  $X$ . 2) Найти функцию распределения случайной величины  $X$ . Построить график функции распределения случайной величины  $X$ .